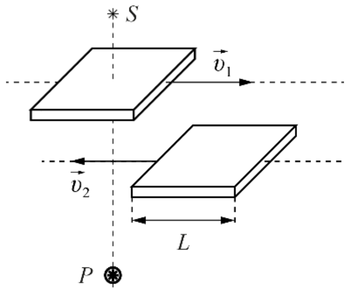
8.1. Подвижные препятствия. Между источником сигнала S и приёмником P перпендикулярно соединяющей их прямой движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями две пластины длиной L = 1 м. Если сигнал по пути от источника к приёмнику проходит только через одну из пластин, то приёмник зажигает жёлтую лампочку, если через две – то красную. В некоторый момент времени на $t_1 = 3$ с зажглась жёлтая лампочка, затем $t_2 = 3$ с горела красная, а потом в течение $t_3 = 1$ с – опять жёлтая.



Определите, за какое время τ одна пластина проезжает мимо другой.

8.1. Возможное решение. Жёлтая лампочка загорается на дисплее в момент, когда одна из пластин (будем называть её первой) начинает перекрывать путь сигналу. В момент, когда загорается красная лампочка, на пути сигнала возникает вторая пластина. Красный цвет меняется на жёлтый, когда одна из пластин перестает мешать прохождению сигнала. Причём, это может быть как первая, так и вторая пластина.

В первом случае скорости пластин можно определить, как:

$$v_1 = \frac{L}{t_1+t_2} \text{ и } v_2 = \frac{L}{t_2+t_3}.$$

Во втором случае скорости пластин будут:

$$u_1 = \frac{L}{t_1+t_2+t_3} \text{ и } u_2 = \frac{L}{t_2}.$$

Пластины движутся друг другу навстречу. Значит, любая из пластин проходит мимо другой со скоростью $v_1 + v_2$ или $u_1 + u_2$ преодолевая при этом расстояние $2L$. В первом случае на это потребуется время:

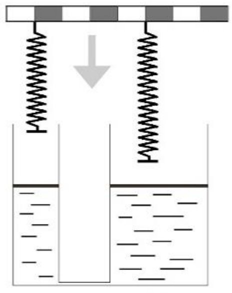
$$\tau_1 = \frac{2L}{\frac{L}{t_1+t_2} + \frac{L}{t_2+t_3}} = \frac{2(t_1+t_2)(t_2+t_3)}{t_1+2t_2+t_3} = 4{,}8 \text{ с.}$$

А во втором:

$$\tau_2 = \frac{2L}{\frac{L}{t_1+t_2+t_3} + \frac{L}{t_2}} = \frac{2t_2(t_1+t_2+t_3)}{t_1+2t_2+t_3} = 4{,}2 \text{ с.}$$

№	8.1. Критерии оценивания (из 15 баллов)	Баллы
1	Указано, что возможны две ситуации	1
2	Описана первая из возможных ситуаций	2
3	Верно определены v_1 и v_2 (1 балл + 1 балл)	2
4	Определено τ_1 (формула)	2
5	Определено τ_1 (число)	1
6	Описана вторая из возможных ситуаций	2
7	Верно определены u_1 и u_2 (1 балл + 1 балл)	2
8	Определено τ_2 (формула)	2
8	Определено τ_2 (число)	1

8.2. Балансир. Две пружины жёсткостью k (длинная) и $2k$ (короткая) отличаются по длине на l. Их прикрепляют к однородной массивной балке длиной $8l$. Затем конструкцию устанавливают на лёгкие тонкие поршни сообщающихся сосудов, заполненных жидкостью плотностью ρ, сечения которых S и $2S$. При этом балка принимает горизонтальное положение. Определите массу балки M.



8.2. Возможное решение. Введем обозначения T_1, l_1 и Δl_1 – сила упругости, длина и деформация левой пружины, T_2, l_2 и Δl_2 – сила упругости, длина и деформация правой пружины, Δh - разница высот между поршнями.

Определим силы упругости пружин. Для этого применим правило моментов для балки относительно точек крепления правой и левой пружин:

$$T_1 \cdot 4l = Mg \cdot l.$$

$$T_2 \cdot 4l = Mg \cdot 3l.$$

Откуда следует:

$$T_1 = \frac{1}{4}Mg.$$

$$T_2 = \frac{3}{4}Mg.$$

Таким образом, давление под правым поршнем будет выше, чем под левым (площади отличаются в 2 раза, а силы – в 3). Значит, левый поршень поднимется, а правый опустится.

Из закона Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{Mg}{8k};\ \Delta l_2 = \frac{3Mg}{4k}. \qquad (1)$$

Из условия равенства давлений на дне сообщающихся сосудов:

$$\frac{Mg}{8S} = \rho g \Delta h. \qquad (2)$$

$$\frac{3Mg}{4 \cdot 2S} = \frac{Mg}{4 \cdot S} + \rho g \Delta h.$$

Поскольку балка горизонтальна:

$$l_1 - \Delta l_1 + \Delta h = l_2 - \Delta l_2. \qquad (3)$$

С учётом разницы длин пружин:

$$\Delta h = l - \Delta l_2 + \Delta l_1 = l - \frac{3Mg}{4k} + \frac{Mg}{8k}. \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим:

$$\frac{Mg}{8S} = \rho g \left(l - \frac{5Mg}{8k}\right).$$

Откуда:

$$M = \frac{8\rho Slk}{(5\rho gS + k)}.$$

№	**8.2. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	**Баллы**
1	Найдены силы натяжения пружин через Mg (1 + 1 = 2 балла)	2
2	Указано или использовано в решении, что левый поршень поднимется, а правый опустится	2
3	Записан Закон Гука для пружин (1) ((1 + 1 = 2 балла)	2
4	Условие равенства давлений на дне сообщающихся сосудов (2)	3
5	Условие на длину пружин (3)	2
6	Получено выражение для Δh (4)	2
7	Получено выражение для M	2

8.3. Тёплый пол. Отопление кухни организовано с помощью системы электрического тёплого пола. Сначала он работал в базовом режиме, и на кухне установилась температура t_1 = 18°C. Затем его мощность увеличили в 4 раза, и температура на кухне возросла до t_2 = 21°C.

- Какая температура t_x установится на кухне, если базовую мощность увеличить в 9 раз?
- Определите температуру t_0 воздуха на улице.

8.3. Возможное решение. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур между улицей и кухней. Пусть P – базовая мощность тёплого пола, а α – коэффициент пропорциональности тепловых потерь. Тогда условия теплового равновесия для каждого из случаев выглядят так:

$$\alpha(t_1 - t_0) = P. \qquad (1)$$

$$\alpha(t_2 - t_0) = 4P. \qquad (2)$$

$$\alpha(t_x - t_0) = 9P. \qquad (3)$$

Разделив (2) на (1) получим:

$$\frac{t_2 - t_0}{t_1 - t_0} = 4,$$

откуда:

$$t_0 = \frac{4t_1 - t_2}{3} = 17°\text{C}.$$

Аналогично, разделив (3) на (1) получим:

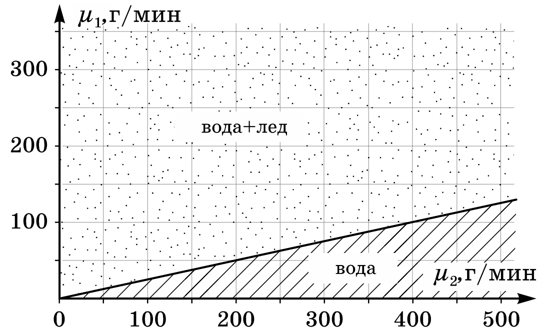
$$\frac{t_x - t_0}{t_1 - t_0} = 9,$$

откуда:

$$t_x = 9t_1 - 8t_0 = 26°\text{C}.$$

№	**8.3. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	**Баллы**
1	Указано, что мощность тепловых потерь пропорциональна разнице температур между улицей и кухней	2
2	Указано, что в установившемся режиме мощность тёплого пола равна мощности тепловых потерь	1
3	Записано уравнение (1) или его аналог	2
4	Записано уравнение (2) или его аналог	2
5	Записано уравнение (3) или его аналог	2
6	Определена температура t_0	3
7	Определена температура t_x	3

8.4. Обледенение. В теплоизолированный сосуд по одной трубе с массовым расходом μ_1 поступает колотый лёд при температуре t_1 = 0°C, а по другой с массовым расходом μ_2 наливается вода при температуре t_2. На осях $\mu_1(\mu_2)$ представлена диаграмма состояний содержимого сосуда.



1) Определите температуру t_2 поступающей воды.
2) Постройте на осях $\mu_1(\mu_2)$ диаграмму состояний содержимого сосуда для случая, когда температура поступающей воды остается прежней, а температура льда равна t_3 = – 40°C.

Удельная теплоёмкость воды $c_в$ = 4200 Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда $c_л$ = 2100 Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда λ = 335 кДж/кг. Теплоёмкостью сосуда можно пренебречь.

8.4. Возможное решение. Прямая, разделяющая на диаграмме две области, соответствует состоянию, в котором сосуд заполнен только водой при 0°C. Т.е. весь лёд тает, но не нагревается. Тогда можно записать уравнение теплового баланса для поступивших за время τ порций воды и льда:

$\mu_1\tau\lambda = \mu_2\tau c_в(t_2 - t_0)$, где t_0 = 0°C – температура плавления льда.

По угловому коэффициенту наклона прямой $\mu_1 = \mu_2 c_в t_2/\lambda$ можно найти температуру воды.

$c_в t_2/\lambda = 0{,}25$, откуда t_2 = 20°C.

Если по первой трубе будет поступать «холодный» лёд, то содержимое сосуда может находиться в трёх различных равновесных состояниях: 1) только лёд; 2) смесь вода + лёд; 3) только вода.

Найдем границу 1 и 2 состояний. Вся поступающая вода замерзает, но остается при 0°C.

До этой же температуры нагревается поступающий лёд. Запишем уравнение теплового баланса.

$$\mu_1\tau c_л(t_0 - t_3) = \mu_2\tau c_в(t_2 - t_0) + \mu_2\tau\lambda,$$

из которого найдём коэффициент наклона прямой, разделяющей 1 и 2 состояния.

$$\mu_1/\mu_2 = (c_в(t_2 - t_0) + \lambda)/(c_л(t_0 - t_3)) = 5{,}0.$$

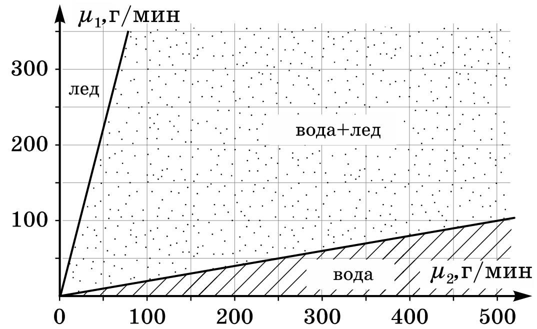
Граница 2 и 3 состояний находится аналогично. Только теперь весь поступающий лёд тает и остаётся при 0°C.

Такому процессу соответствует уравнение теплового баланса:

$$\mu_1\tau c_л(t_0 - t_3) + \mu_1\tau\lambda = \mu_2\tau c_в(t_2 - t_0),$$

из которого $\mu_1/\mu_2 = c_в(t_2 - t_0)/(c_л(t_0 - t_3) + \lambda) = 0{,}20$.

Строим новую диаграмму состояний.



№	**8.4. Критерии оценивания (из 15 баллов)**	**Баллы**
1	Уравнение теплового баланса для граничного состояния содержимого	2
2	Определение температуры воды из углового коэффициента наклона (идея (2 балла) + численный результат (1 балл))	3
3	Учёт трёх возможных состояний содержимого в случае «холодного» льда	2
4	Уравнение теплового баланса для границы 1 и 2 состояний содержимого	2
5	Расчёт углового коэффициента наклона границы 1 и 2 состояний	1
6	Уравнение теплового баланса для границы 2 и 3 состояний содержимого	2
7	Расчёт углового коэффициента наклона границы 2 и 3 состояний	1
8	Построение диаграммы состояний	2